Option mathématiques complémentaires

Terminale générale

À qui s'adresse cette option ?

L'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires est destiné prioritairement aux élèves qui, ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en classe de première et ne souhaitant pas poursuivre cet enseignement en classe terminale, ont cependant besoin de compléter leurs connaissances et compétences mathématiques par un enseignement adapté à leur poursuite d'études dans l'enseignement supérieur, en particulier en médecine, économie ou sciences sociales.

Les enjeux de cette option

Le programme de mathématiques complémentaires s’appuie sur le programme de spécialité de mathématiques de la classe de première qu’il réinvestit et enrichit de nouvelles connaissances et compétences mathématiques, elles-mêmes reliées à des thèmes d’étude où les notions sont mises en situation dans divers champs disciplinaires.

Les compétences développées

Dans le prolongement des cycles précédents, on travaille les grandes compétences mathématiques :

- chercher, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique, etc.), changer de registre ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

THÈMES ÉTUDIÉS
et
NOTIONS ASSOCIÉES

Les thèmes d'étude du programme proposent une approche nouvelle, avec des problèmes issus des autres disciplines ou internes aux mathématiques.

Modèles définis par une fonction d’une variable

- Modèles issus de contextes géométriques (expression de distance, d’aires, de volumes en fonction d’un paramètre), physiques, biologiques, économiques (fonctions de coût, coût marginal, coût moyen).

- Études de variations, résolutions d’équation, optimisation dans des configurations géométriques, physiques, économiques, etc.

Modèles d'évolution

- Évolution d'un capital, amortissement d'une dette.
- Loi de décroissance radioactive : modèle discret, continu.
- Décharge, charge d'un condensateur, à partir de l'équation différentielle.
- Loi de refroidissement de Newton (modèle discret).
- Chute d'un corps dans un fluide visqueux.
- Dynamique des populations : modèle de Malthus (géométrique), modèle de Verhulst (logistique) discret ou continu
- Modèle proie prédateur discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.

Approche historique de la fonction logarithme

- Le développement des besoins pratiques de calcul, notamment pour l'astronomie ou la navigation conduit à la recherche de méthodes facilitant multiplication, division, extraction de racine.
- Influence des tables trigonométriques.
- Lien entre suites arithmétiques et géométriques (depuis Archimède).
- Construction de tables d'intérêts.
- Les travaux de Neper. Le passage du discret au continu.
- Vision fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$ plus tardive.
- Quadrature de l'hyperbole, problème des sous-tangentes constantes.

Calculs d’aires

- Quadrature de la parabole par la méthode d’Archimède.
- Quadrature de l’hyperbole par une ou deux méthodes (Brouncker, Grégoire de SaintVincent).
- Approximation de l’aire sous la courbe de la fonction exponentielle sur [0,1] par la méthode des rectangles.
- Estimation de l’aire sous une courbe par la méthode de Monte-Carlo.
- Approximation de π et aire d’un disque.

Répartition des richesses, inégalités

- Courbe de Lorenz : sur des données réelles, présentation, définition, lecture, construction d'une ligne polygonale à partir des quantiles, interprétation.
- Modélisation par la courbe représentative d'une fonction continue, croissante, convexe de [0,1] dans [0,1] et ayant 0 et 1 comme points fixes. Position par rapport à la première bissectrice.
- Indice de Gini : définition, calcul, interprétation comme mesure du degré d'inégalité d'une répartition.
- Comparaison de plusieurs répartitions. Évolution de l'indice sur une période.

Inférence bayésienne

- Tests binaires pour le diagnostic médical. Notion de vrais/faux positifs et négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive (diagnostique) et négative, lien avec les probabilités conditionnelles.
- Tests de dépistage de sensibilité et de spécificité données : étude des valeurs prédictives en fonction de la proportion de malades et interprétation.
- Exemples de problèmes du type : « De quelle urne vient la boule ? ».

Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

- Tirages aléatoires avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes. Simulations. Calculs de probabilité.
- Test d'une pièce, par construction d'un intervalle I centré en $n/2$ tel que $P(X \in I) \geqslant 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,1/2)$
- Surréservation. Construction d'un intervalle I de la forme $[0,k]$ tel que $P(X \in I) \geqslant 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
- Sondages par échantillonnage aléatoire simple. Fourchette de sondage. Réflexion sur la réalisation effective d'un sondage et les biais possibles (représentativité, sincérité des réponses, etc.).
- Démarche des tests d'hypothèse et de l'estimation.

Temps d'attente

- Durée de vie d'un atome radioactif. Discrétisation d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.
- Exemples de modélisation par une variable aléatoire suivant une loi géométrique ou exponentielle : durée entre deux appels téléphoniques, durée de vie d'un composant électronique, période de retour de crue, etc.
- Utilisation de la loi uniforme. Temps d'attente à un arrêt de bus, paradoxe de l'inspection.

Corrélation et causalité

- Établissement de la loi d'Ohm.
- Loi de désintégration radioactive.
- Évolution de la température et des émissions de gaz à effet de serre dans le cadre du réchauffement climatique.
- Loi de Moore.

CONTENUS MATHÉMATIQUES

Toutes les compétences mathématiques sont mobilisées, notamment le raisonnement et la capacité à construire une démonstration.

Les compétences de modélisation et de communication sont particulièrement mises en valeur.

Suites numériques, modèles discrets

- Approche intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite, des opérations sur les limites, du passage à la limite dans les inégalités et du théorème des gendarmes.
- Limite d'une suite géométrique de raison positive.
- Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.
- Suites arithmético-géométriques.

Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique

- Notion de limite. Lien avec la continuité et les asymptotes horizontales ou verticales. Limites des fonctions de référence
- Théorème des valeurs intermédiaires ; cas des fonctions strictement monotones.
- Réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle, représentation graphique.
- Fonction logarithme népérien : réciproque de la fonction exponentielle.
- Fonction dérivée de $x \mapsto f(a\,x+b)$, $x \mapsto exp(u(x))$, $x \mapsto$ $x \mapsto ln\,u(x)$, $x \mapsto u(x)^2$.

Primitives et équations différentielles

- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou une fonction de la forme $2\,u\,u'$, $u'\exp(u)$ ou $u'\,/\,u$.
- Résoudre une équation différentielle $y' = a\,y$.
  Pour une équation différentielle $y' = a\,y + b$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.

Fonctions convexes

- Dérivée seconde d'une fonction.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition et propriétés équivalentes.
- Caractérisation admise par la croissance de f', la positivité de f''.
- Point d'inflexion

Intégration

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur [a,b] comme aire sous la courbe.
- Notation $\int f(x)\mathrm{d}x$. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction continue sur [a,b]. Approche graphique et numérique.
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.
- Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque.
- Théorème : si f est continue sur [a,b], la fonction F définie sur [a,b] par $F(x) = \int f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur [a,b] et a pour dérivée f.
- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

Probabilités et statistique

- Loi uniforme sur $\{1,2,\ldots,n\}$. Espérance.
- Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli : définition, espérance et écart type.
- Schéma de Bernoulli. Représentation par un arbre.
- Coefficients binomiaux : définition (nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n), triangle de Pascal, symétrie.
- Variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Interprétation : Représentation graphique, expression, espérance et écart type
- Loi géométrique : définition, expression, espérance, représentation graphique et propriété caractéristique.

Lois à densité

- Notion de loi à densité à partir d'exemples. Représentation d'une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leqslant x)$
- Espérance et variance d'une loi à densité, expressions sous forme d'intégrales.
- Loi uniforme sur [0,1] puis sur [a,b]. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance.
- Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire.

Statistique à deux variables quantitatives

- Représenter un nuage de points.
- Calculer les coordonnées d'un point moyen.
- Déterminer une droite de régression, à l'aide de la calculatrice, d'un logiciel ou par calcul.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler.

Algorithmique et programmation

En algorithmique et programmation, le programme de mathématiques complémentaires reprend les programmes des classes de seconde et de première sans introduire de notion nouvelle, afin de consolider le travail des classes précédentes.

ÉCLAIRER LES CHOIX D'ORIENTATION

La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de son rôle dans les autres disciplines. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.